

[H25] Lorentztransformation eines Lichtstrahls (1+2 Punkte)

Ein Lichtstrahl kann durch eine ebene Welle $\Phi(x^0, \vec{x}) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ beschrieben werden. Dabei ist im lichtartigen Wellenvektor $k = \omega(1, \vec{e})$ die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$, wobei λ die Wellenlänge des Lichtstrahls bedeutet, und die Ausbreitungsrichtung \vec{e} des Lichtstrahls zu einem Vierervektor zusammengefaßt¹. Ein ruhender Beobachter sieht einen Lichtstrahl, der unter dem Winkel θ zur positiven x -Achse einfällt. Wählen Sie das Bezugssystem so, daß der Lichtstrahl in der x, y Ebene liegt. Betrachten Sie außerdem einen bewegten Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} in x -Richtung bewegt.

- (a) Wie lauten die Komponenten des lichtartigen Wellenvektors k im Bezugssystem des ruhenden Beobachters?
- (b) Wie lautet der Wellenvektor $k' = \Lambda k$, den der bewegte Beobachter wahrnimmt? Wie groß ist die Wellenlänge λ' ? Welcher Winkel θ trennt blauverschobenes von rotverschobenem Licht?

[H26] Ein forminvarianter Tensor (2 Punkte)

Im 1+1-dimensionalen Minkowskiraum sei der Tensor T^{mn} in einem Inertialsystem (x^0, x^1) durch

$$T = \begin{pmatrix} x^0 x^1 & (x^1)^2 \\ (x^0)^2 & x^0 x^1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß T in jedem durch Lorentztransformationen erreichbaren System dieselbe Form hat.

[H27] Überlichtgeschwindigkeit? (2+3 Punkte)

Im Inertialsystem S („Erde“) bewegt sich ein Projektil auf einer idealen Wurfpabel, die durch $x(t) = v_x t$, $y(t) = v_y t - \frac{g}{2} t^2$ gegeben sei, und befindet sich in der Zeit zwischen $t = 0$ und $t = T$ in der „Luft“ ($y \geq 0$). Ein Beobachter, der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit großen Abstand D auf der x -Achse befindet, bewege sich mit der relativistischen Geschwindigkeit $-V\vec{e}_x$ auf das Geschehen zu.

- (a) Welche Bahnkurve $\vec{x}'(t')$ ergibt sich im Inertialsystem S' des Beobachters? Welche anfängliche Steiggeschwindigkeit v'_y und welche Beschleunigungskonstante g' folgen daraus?
- (b) Welche anfängliche Steiggeschwindigkeit $(v')_{scheinbar}$ sieht der Beobachter in S' , wenn er das Geschehen durch ein Teleskop beobachtet?
Hinweis: Beim *Sehen* von Ereignissen ist die Lichtlaufzeit zu berücksichtigen. Der Abstand des Beobachters sei so groß, daß in erster Näherung hierzu nur der horizontale Abstand beiträgt: $t_{beob} = t' + (D' - x'(t'))/c$.
 Zeigen Sie, daß $(v')_{scheinbar} \gg c$ realisierbar ist, obwohl sowie v_y als auch v'_y immer kleiner als c sind!

Vorlesung: O. Lechtenfeld - Übungen: R. Wimmer

¹Hier werden Einheiten verwendet, in denen $c = 1$ gilt.